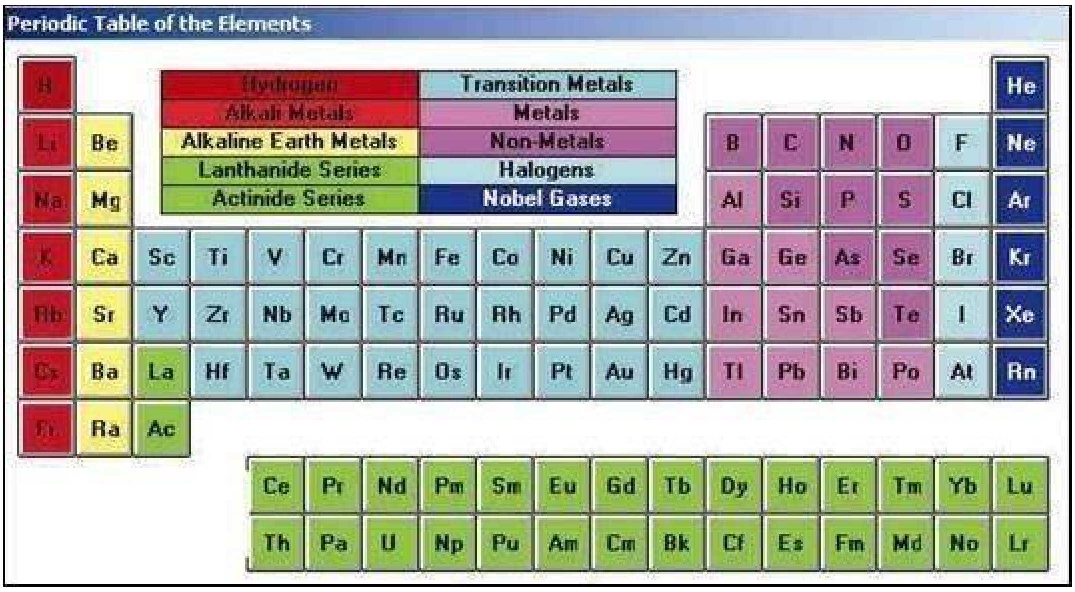
Entalpia di un nucleo atomico

Autore: Antonello Urso **(10/07/06)**



Consideriamo un atomico nucleo composta da Z protoni e $N = A - Z$, dove A è il numero di massa. Se indichiamo con X un elemento chimico che viene scomposto nei suoi singoli protoni (p) e neutroni(n) avremo:

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow Zp + (A-Z)n + H(A;Z) \tag{1} $$

Dove $H(A;Z)$ è l'entalpia legata al processo[1], che in questo caso è positiva.

$$ H(A;Z) = \left[Zm_p + (A-Z)m_n - M_x \right] c^2 \tag{2} $$

cercheremo di trovare un modello semiempirico che descriva l'entalpia di un nucleo atomico, supponendo che sia come un insieme di particelle in stati legati rinchiuse in un volume V dal loro potenziale attrattivo a corto raggio[2]. Supponiamo ora che l'energia meccanica totale *(potenziale più cinetica)* del nucleo[3] stabile sia determinata dalla diversa attrazione a corto raggio protone-neutrone, protone-protone, neutrone-neutrone. Essendo presenti: $Z(Z-1)/2$; $N(N-1)/2$; NZ coppie ci aspetteremo:

$$ -\frac{1}{2}Z(Z-1)\overline{U}_p - \frac{1}{2}N(N-1)\overline{U}_n - NZ\overline{U}_{np} \tag{3} $$

che è una dipendenza quadratica di Z ed N ma se le coppie interagenti sono solo quelle per cui i due nucleoni sono entro lo stesso volume di interazione allora è soltanto la frazione: $v_{\text{int.}}/V_{nucleo} = v_{\text{int.}}/Av_0$ *(v_0 =volume di un singolo nucleone)* che contribuisce all'energia di legame rispetto al potenziale nucleare attrattivo, cioè:

$$ E \approx -\frac{1}{2}\left[Z(Z-1)\overline{U}_p + N(N-1)\overline{U}_n + 2NZ\overline{U}_{np} \right] \frac{v_{\text{int.}}}{Av_0} \tag{4} $$

In questo modello a parte il potenziale elettrostatico non c'è praticamente differenza tra il protone e il neutrone dato che le loro masse sono quasi identiche. Questo si può vedere sperimentalmente nel caso dei nuclei speculari che hanno Z e N scambiati e la cui entalpia differisce solo per il potenziale colombiano, che ci porta alla considerazione che: $\overline{U}_p = \overline{U}_n \equiv \overline{U}$. Quindi la (4) si può scrivere come:

$$ E \approx -\frac{1}{2}\left[A(A-1)\overline{U} + 2NZ(\overline{U}_{np} - \overline{U}) \right] \frac{v_{\text{int.}}}{Av_0} = -U_1(A-1) - U_2(A-Z)Z/A \tag{5} $$

La (5) è naturalmente una formula un pò grossolana, ma possiamo migliorarne il funzionamento:

---

[1] O l'energia di legame cambiata di segno.

[2] Questo modello a stati legati è una articolata alternativa al vecchio modello a "goccia liquida" di Weiszäcker (1935).

[3] Per la relazione di indeterminazione non conviene distinguere tra energia cinetica e potenziale almeno per bassi stati quantici.

$$E = -U_1\left[A + f(A)\right] - U_2(A-Z)Z/A \tag{6}$$

dove: $f(A)$ è una funzione empirica definita da uno sviluppo in serie fratta, con varie costanti numeriche da determinare sperimentalmente, e costante per grandi valori di A , cioè:

$$f(A) = K\frac{1+\frac{k_1}{A}+\frac{k_2}{A^2}+\ldots}{1+\frac{h_1}{A}+\frac{h_2}{A^2}+\ldots} \cong K\frac{1+\frac{k_1}{A}}{1+\frac{h_1}{A}} = K\frac{A+k_1}{A+h_1} \tag{7}$$

Per avere una buona approssimazione basta fermarsi al primo ordine sia al numeratore che al denominatore; il fatto poi che dipenda solo da A è una condizione sufficiente per il rispettare il criterio dei nuclei speculari. L'ultimo termine energetico che entra in gioco infine è il potenziale elettrostatico repulsivo[4]:

$$E_c = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\frac{(3Z-1)(Z-1)}{5A^{1/3}} \tag{8}$$

Avremo quindi:

$$E_{\text{tot}} = -U_2(A-Z)Z/A - U_1\left[A+f(A)\right] + U_3\frac{(3Z-1)(Z-1)}{A^{1/3}} \tag{9}$$

Sostituendo i dati numerici dedotti sperimentalmente[5] e indicando con: $H_r \equiv -E_{\text{tot}}/A$ *(entalpia media per nucleone in Mev)*:

$$H_r(A;Z) \cong 89.6(A-Z)Z/A^2 - 8.7 - \frac{230(A+k_1)}{A(A+31)} - 0.24\frac{(3Z-1)(Z-1)}{A^{4/3}} \tag{10}$$

dove la costante k_1 dipende dall'accoppiamento di spin tra i vari nucleoni secondo se Z ed N sono pari o dispari e cioè:

$$\begin{cases} k_1 = 0 & \text{(nuclei pari - pari)} \\ k_1 = 0.7 & \text{(nuclei pari - dispari)} \\ k_1 = 1.6 & \text{(nuclei dispari - dispari)} \end{cases}$$

Dalla (10) si può vedere come l'attrazione si manifesta solo tra protone e neutrone *(che avviene mediante scambio di mesoni tra gli orbitali nucleonici)* ed in modo notevole, mentre esiste una repulsione tra protone-protone, e neutrone-neutrone. Questo spiega perché non esistono nuclei atomici formati da agglomerati di soli protoni, o di soli neutroni. Ricaviamo adesso per esercizio la formula che ci fornisce approssimativamente *(per: Z>>1)* l'isobaro *(A costante)* dispari più stabile, che è quello con un massimo nell'entalpia, cioè: $d\left[A \cdot H_r(A;Z)\right]/dZ = 0$.
Quindi facendo i calcoli con la (10) otteniamo:

---

4 Vedi: A. Urso - Considerazioni attorno all'energia elettrostatica di un nucleo atomico.

5 Tranne che per la (8) dove la costante si può calcolare teoricamente prendendo un raggio del nucleone pari a 1.2 fm.

$$Z \cong \frac{A}{2 + 0.016 A^{2/3}} \tag{11}$$

Dal seguente grafico possiamo vedere praticamente la situazione: i pallini azzurri, rosa, e verdi, rappresentano rispettivamente i valori oggettivi dei nuclei pari-pari, pari-dispari, e dispari-dispari; mentre i quadratini dei rispettivi colori associati rappresentano i valori calcolati con la (10).

Figura 1

Possiamo vedere che l'accordo è soddisfacente *(e per A>20 anche per i nuclei instabili)*, e può essere migliorato se si prendono un maggiore numero di termini della (7).

Bibliografia essenziale

R. Gauteau, W. Savin "Fisica moderna" Etas libri.