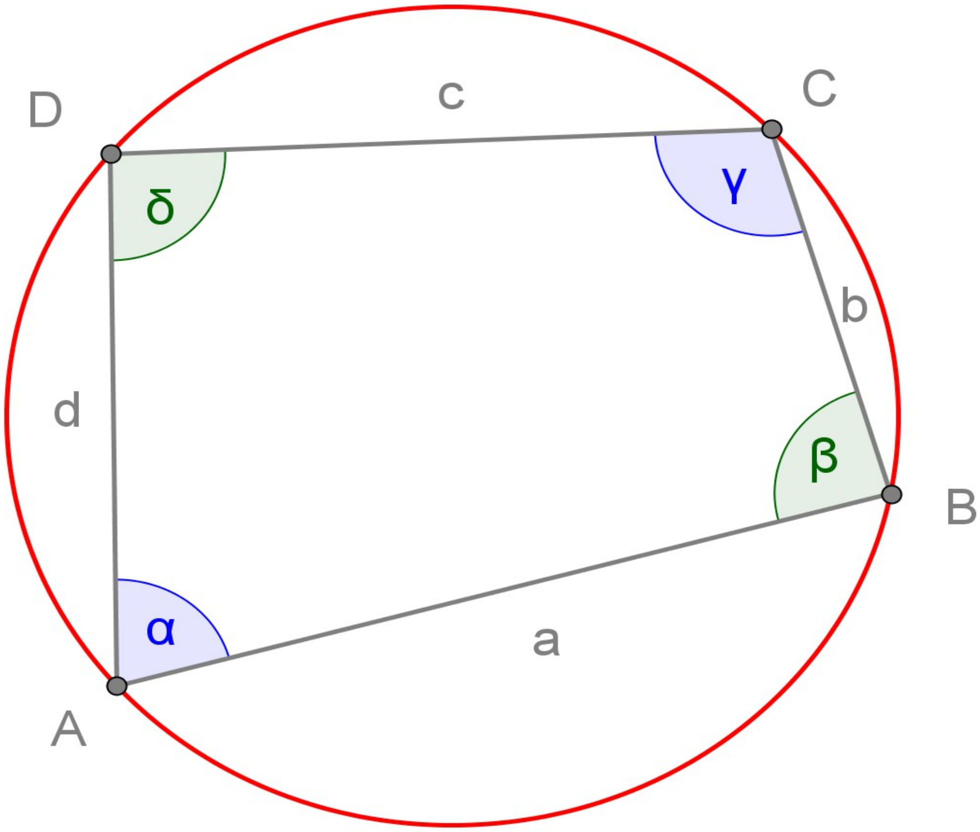
Dimostrazione della formula di Brahmagupta

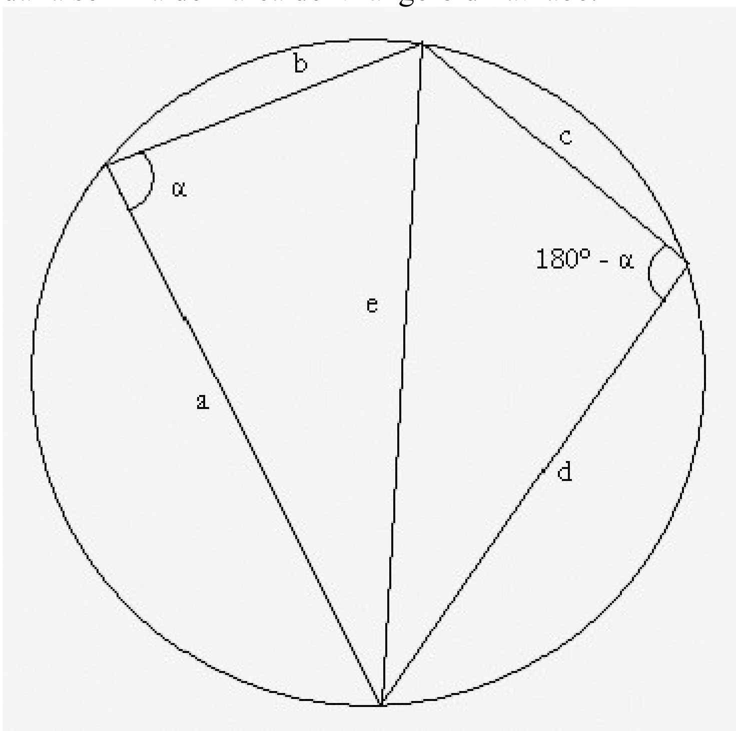
Autore: Antonello Urso (11/07/04)



Dimostreremo in questo articolo, la formula di Erone generalizzata per un quadrilatero inscrittibile in una circonferenza[1]

Se consideriamo un generico quadrilatero inscrittibile, abbiamo che gli angoli opposti sono supplementari *(basta solo osservare che usando il teorema dei seni:* $sen\alpha = e/r$ *abbiamo due soluzioni per l'angolo…).*

La superficie totale del quadrilatero è data dalla somma dell'area del triangolo di lati abe:



$$S_1 = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$$

e quella del triangolo di lati cde

$$S_2 = \frac{1}{2} cd \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} cd \sin\alpha$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\alpha \qquad \textbf{(1)}$$

Usando ora il teorema di Carnot:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = d^2 + c^2 - 2dc\cos(180° - \alpha) =$$
$$= d^2 + c^2 + 2dc\cos\alpha$$

e ricavando $\cos\alpha$ abbiamo:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - d^2 - c^2}{2ab + 2dc}$$

ricaviamo adesso il seno dell'angolo α

[1] La formula di Erone e Brahmagupta sono temi usciti nel concorso a cattedre del 1999.

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{a^2+b^2-d^2-c^2}{2ab+2dc}\right)^2 = \left(1-\frac{a^2+b^2-d^2-c^2}{2ab+2dc}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-d^2-c^2}{2ab+2dc}\right)=$$

$$=\frac{(d+c)^2-(a-b)^2}{2ab+2dc}\cdot\frac{(a+b)^2-(d-c)^2}{2ab+2dc}=\frac{(d+c-a+b)(d+c+a-b)(a+b-d+c)(a+b+d-c)}{4(ab+dc)^2};$$

se indichiamo con p il semiperimetro abbiamo: $2p = a+b+c$; quindi dopo qualche semplice calcolo otteniamo:

$$\sin^2\alpha = \frac{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2d)(2p-2c)}{4(ab+dc)^2} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ab+dc)^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Prendendo adesso il quadrato della **(1)** e sostituendo nella **(2)** otteniamo:

$S^2 = \frac{1}{4}(ab+cd)^2\sin^2\alpha = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$, Quindi:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

come volevasi dimostrare.