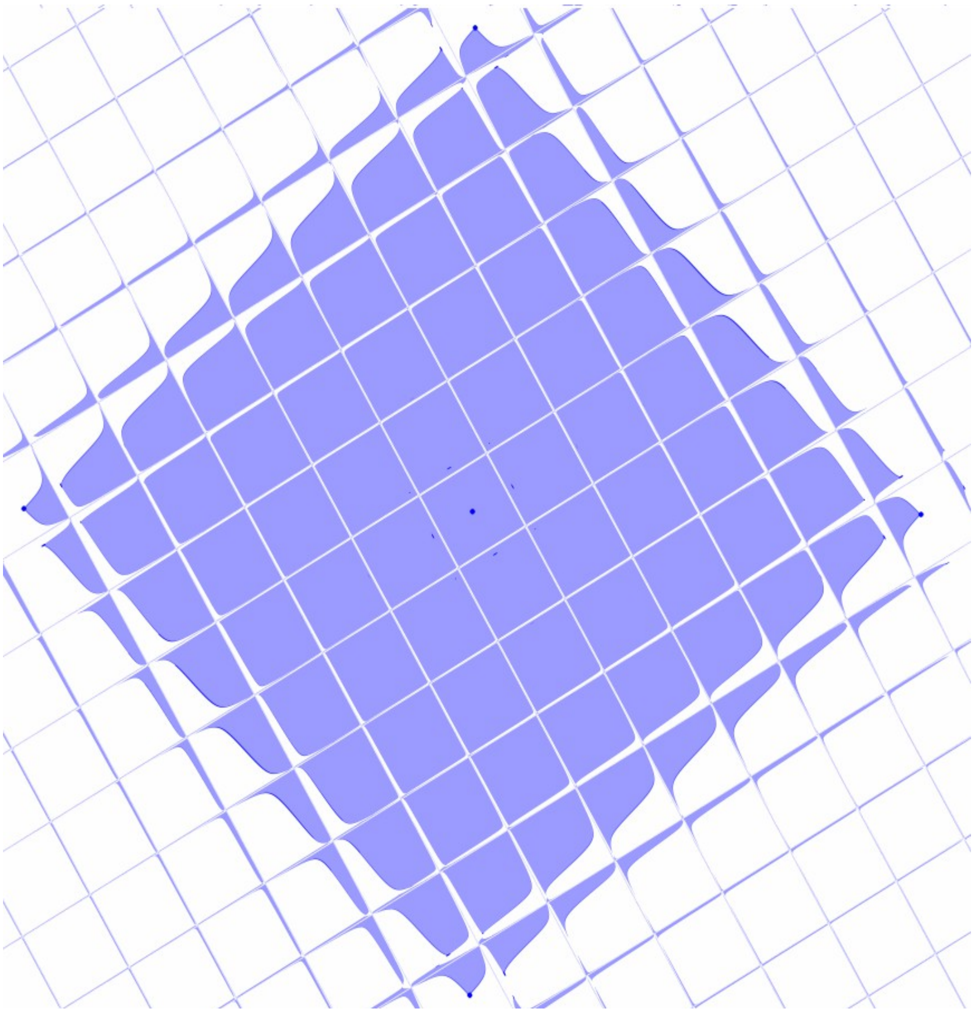
Dimostrazione della formula di Brahmagupta generalizzata per qualsiasi quadrilatero

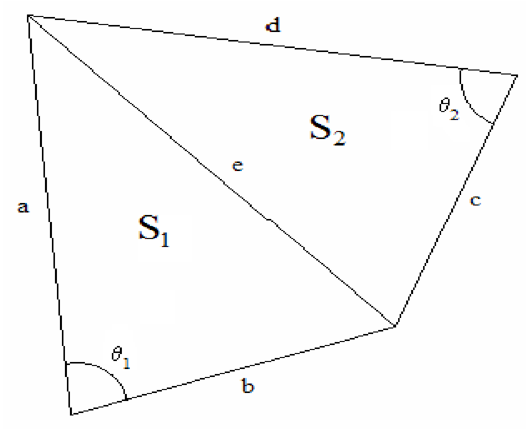
Autore: Antonello Urso (26/06/05)



www.pianetagalileo.eu (SS)

A. Urso - Dimostrazione della formula di Brahmagupta generalizzata per qualsiasi quadrilatero

Dimostreremo in questa pagina una formula molto interessante che fornisce una generalizzazione della formula di Brahmagupta per qualsiasi quadrilatero.
Iniziamo a dividere il generico quadrilatero mostrato in figura lungo una qualsiasi delle sue diagonali (e).



Usando la formula di Carnot abbiamo:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta_1 = d^2 + c^2 - 2dc\cos\theta_2;$$

$$a^2 + b^2 - d^2 - c^2 = 2(ab\cos\theta_1 - dc\cos\theta_2);$$

eleviamo ora entrambi i membri al quadrato:

$$\left(a^2 + b^2 - d^2 - c^2\right)^2 = 4(ab\cos\theta_1 - dc\cos\theta_2)^2;$$

$$\left(a^2 + b^2 - d^2 - c^2\right)^2 = 4\left(a^2b^2\cos^2\theta_1 + d^2c^2\cos^2\theta_2 - 2abdc\cos\theta_1\cos\theta_2\right);$$

$$\frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 - d^2 - c^2\right)^2 = a^2b^2\left(1 - \sin^2\theta_1\right) + d^2c^2\left(1 - \sin^2\theta_2\right) - 2abdc\cos\theta_1\cos\theta_2;$$

$$-\frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 - d^2 - c^2\right)^2 + a^2b^2 + d^2c^2 = a^2b^2\sin^2\theta_1 + d^2c^2\sin^2\theta_2 + 2abdc\cos\theta_1\cos\theta_2;$$

e tenendo conto che:

$$S_1 = \frac{1}{2}ab\sin\theta_1 \quad ; \quad S_2 = \frac{1}{2}cd\sin\theta_2 \quad ; \quad S = S_1 + S_2;$$

abbiamo:

$$a^2b^2 + d^2c^2 - \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 - d^2 - c^2\right)^2 = 4S_1^2 + 4S_2^2 + 2abdc\cos\theta_1\cos\theta_2;$$

$$\frac{a^2b^2 + d^2c^2}{4} - \frac{\left(a^2 + b^2 - d^2 - c^2\right)^2}{16} = S_1^2 + S_2^2 + \frac{1}{2}abdc\cos\theta_1\cos\theta_2 =$$

$$= (S_1 + S_2)^2 - 2S_1S_2 + \frac{1}{2}abdc\cos\theta_1\cos\theta_2 = S^2 - \frac{1}{2}abdc\sin\theta_1\sin\theta_2 + \frac{1}{2}abdc\cos\theta_1\cos\theta_2 =$$

$$= S^2 + \frac{1}{2}abcd\cos(\theta_1 + \theta_2) \quad ;$$

sommiamo adesso ad entrambi i membri $\frac{1}{2}abcd$ e sistemando otteniamo:

$$\frac{(ab + dc)^2}{4} - \frac{\left(a^2 + b^2 - d^2 - c^2\right)^2}{16} = S^2 + \frac{1}{2}abcd\cos(\theta_1 + \theta_2) + \frac{1}{2}abcd;$$

$$\frac{4(ab+dc)^2-\left(a^2+b^2-d^2-c^2\right)^2}{16}=S^2+abcd\left[\frac{1+\cos(\theta_1+\theta_2)}{2}\right]=S^2+abcd\cos^2\theta\ ;$$

dove abbiamo posto: $\theta=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$;

$$S^2+abcd\cos^2\theta=\frac{(2ab+2dc)^2-\left(a^2+b^2-d^2-c^2\right)^2}{16}=$$

$$=\frac{1}{16}\left(2ab+2dc-a^2-b^2+d^2+c^2\right)\left(2ab+2dc+a^2+b^2-d^2-c^2\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left[(d+c)^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-(d-c)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{16}(d+c-a+b)(d+c+a-b)(a+b+d-c)(a+b-d+c)=$$

$$=\frac{1}{16}(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d)=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)\qquad ;$$

dove abbiamo posto: $2p=a+b+c+d$

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\theta\ :$$

quindi in definitiva:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\theta}$$

come volevasi dimostrare.

Notiamo che una volta fissata la misura dei quattro lati, l'area massima si ottiene per: $\cos^2\theta=0$; quindi per $\theta_1+\theta_2=180^0$.

Di conseguenza i quadrilateri con area massima sono quelli con gli angoli opposti supplementari (cioè quadrilateri ciclici).