Dimostrazione algebrica della formula di Erone

Autore: Antonello Urso (02/07/04)

www.pianetagalileo.eu – (SS)

Nei testi scolastici di matematica non si trova purtroppo una dimostrazione algebrica di questa famosa formula *(anche se alle volte si può trovare una contorta dimostrazione trigonometrica)*. Ecco qui tutti i passaggi:

Supponiamo di avere il seguente generico triangolo:

$$h^2 = a^2 - n^2 = c^2 - m^2$$

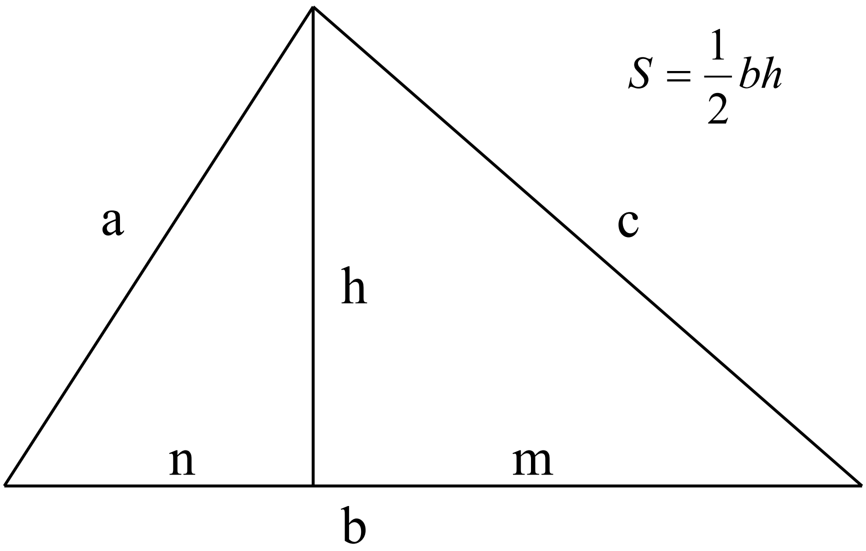
$$b = m + n$$

quindi:

$$\begin{cases} a^2 - n^2 = c^2 - m^2 \\ b = m + n \end{cases}$$

oppure:

$$\begin{cases} c^2 - a^2 = m^2 - n^2 \\ b = m + n \end{cases}$$



$$S = \frac{1}{2} bh$$

Dividendo membro a membro e risolvendo rispetto ad n *(se si risolve rispetto ad m alla fine si ottiene lo stesso risultato)*, otterremo:

$$n = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}$$

Adesso usando la classica formula per l'area di un triangolo…

$$S = \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} b \sqrt{a^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b} \right)^2} = \frac{1}{2} b \sqrt{\left(a - \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b} \right) \left(a + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b} \right)} =$$

$$= \frac{1}{2} b \sqrt{\left(\frac{2ab - b^2 - a^2 + c^2}{2b} \right) \left(\frac{2ab + b^2 + a^2 - c^2}{2b} \right)} = \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{\left[c^2 - (a-b)^2 \right] \cdot \left[(a+b)^2 - c^2 \right]}{4b^2}} =$$

(indichiamo con: $2p = a + b + c$; dove p è il semiperimetro)

$$= \sqrt{\frac{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}{16}} = \sqrt{\frac{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)2p}{16}};$$

infine mettendo in evidenza il 2 dalle varie parentesi al numeratore, e semplificando con il denominatore, otterremo:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Come volevasi dimostrare.