

# **Dimostrazione algebrica della formula di Erone**

**Autore: Antonello Urso** (02/07/04)



## A. Urso – Dimostrazione della formula di Erone

Nei testi scolastici di matematica non si trova purtroppo una dimostrazione algebrica di questa famosa formula (*anche se alle volte si può trovare una contorta dimostrazione trigonometrica*). Ecco qui tutti i passaggi:

Supponiamo di avere il seguente generico triangolo:

$h^2 = a^2 - n^2 = c^2 - m^2$

$b = m + n$

quindi:

$$\begin{cases} a^2 - n^2 = c^2 - m^2 \\ b = m + n \end{cases}$$

oppure:

$$\begin{cases} c^2 - a^2 = m^2 - n^2 \\ b = m + n \end{cases}$$

The diagram shows a triangle with a vertical line segment representing the height  $h$  from the top vertex to the base. The base is labeled  $b$  and is divided into two segments,  $n$  on the left and  $m$  on the right. The left side of the triangle is labeled  $a$ , and the right side is labeled  $c$ .

$S = \frac{1}{2}bh$

Dividendo membro a membro e risolvendo rispetto ad  $n$  (*se si risolve rispetto ad  $m$  alla fine si ottiene lo stesso risultato*), otterremo:

$$n = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}$$

Adesso usando la classica formula per l'area di un triangolo...

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}b\sqrt{a^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}\right)^2} = \frac{1}{2}b\sqrt{\left(a - \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}\right)\left(a + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}\right)} = \\ &= \frac{1}{2}b\sqrt{\left(\frac{2ab - b^2 - a^2 + c^2}{2b}\right)\left(\frac{2ab + b^2 + a^2 - c^2}{2b}\right)} = \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{[c^2 - (a-b)^2] \cdot [(a+b)^2 - c^2]}{4b^2}} = \end{aligned}$$

(indichiamo con:  $2p = a + b + c$  ; dove  $p$  è il semiperimetro)

A. Urso – Dimostrazione della formula di Erone

$$= \sqrt{\frac{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}{16}} = \sqrt{\frac{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)2p}{16}} ;$$

infine mettendo in evidenza il 2 dalle varie parentesi al numeratore, e semplificando con il denominatore, otterremo:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Come volevasi dimostrare.