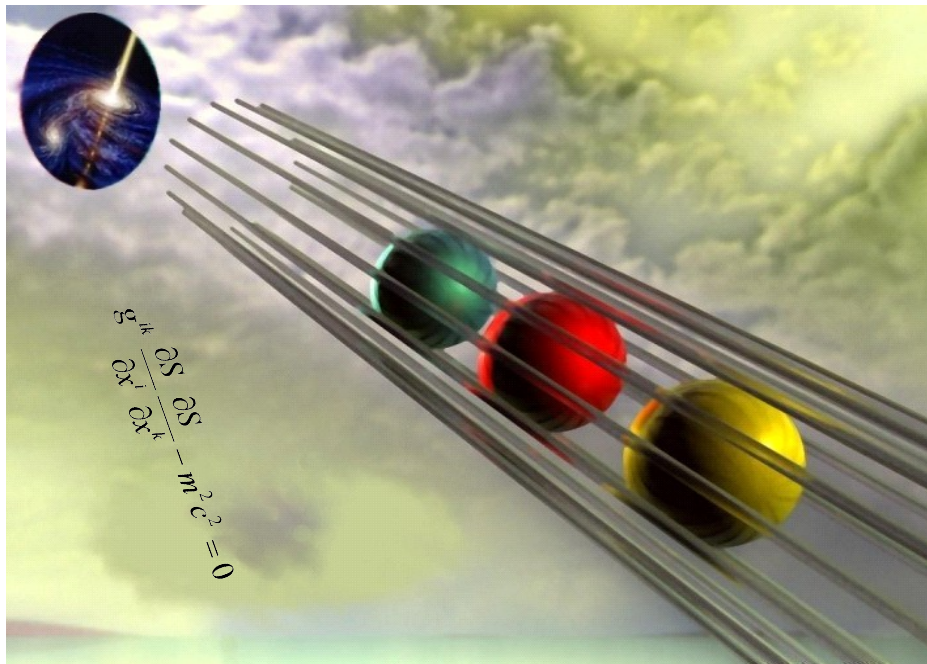


Modello semiclassico della Relatività Generale

Autore: Antonello Urso (01/07/15)



Introduzione

Si possono trovare in tutti i testi di fisica che trattano la relatività ristretta (RR) gli sforzi per ottenere un modello abbastanza semplice che descriva un corpo in un complicato moto sottoposto ad uno o più potenziali al fine di avere un risultato più attendibile rispetto alla mera trattazione del problema fornita dalla meccanica classica (MC). Purtroppo sebbene tali formulazioni possano sembrare apparentemente coerenti e rigorose forniscono tuttavia solo una grezza trattazione qualitativa del comportamento di un corpo sottoposto a potenziali nel caso relativistico. Questo è dovuto essenzialmente a due fattori principali: il primo riguarda le modalità di interazione e il sistema di composizione stessa dei potenziali per i quali non vale (al contrario della MC) il principio di composizione lineare, cioè il potenziale complessivo non è uguale alla semplice somma dei singoli potenziali. Il secondo fattore (il più importante) riguarda la natura stessa della RR che è alla base una teoria cinematica nata per descrivere quantità come tempo, spazio, quantità di moto ed energia per semplici moti rettilinei uniformi, e che quindi solo superficialmente riesce ad adattarsi ad essere attrezzata con concetti presi interamente a prestito dalla MC come forze, accelerazioni e potenziali, che pertanto non possono che apparire alla fine come ospiti ambigui nel suo contesto.

Tali problematiche, come ben sappiamo, vengono brillantemente risolte dalla relatività generale (RG) dove i potenziali scaturiscono in modo naturale dalle caratteristiche della metrica dello spaziotempo che a sua volta regola il moto di qualsiasi corpo. Purtroppo sebbene la RG sia una teoria estremamente elegante per la sua coerenza logica tuttavia a causa della sua intrinseca complessità matematica riesce ad affrontare e risolvere solo problemi con simmetrie relativamente semplici spesso nascondendo dentro le sue equazioni il significato euristico del fenomeno studiato.

Il nostro obiettivo è adesso formulare una teoria semiclassica della relatività generale (TSC) che, muovendosi nell'ambito della MC ci permetta di poter ottenere agevolmente, in modo esatto o almeno in prima approssimazione, tutti i risultati più importanti derivati dalla RG per velocità inferiori rispetto alla velocità della luce.

Sebbene le teorie semiclassiche non abbiano, ovviamente, nessuna pretesa di rigore tuttavia sono utili per due ragioni fondamentali: la prima è che possono essere facilmente utilizzate grazie alla loro relativa semplicità per avere una prima idea dell'andamento del fenomeno studiato prima di addentrarsi nella più lunga e complicata "teoria rigorosa", e la seconda ragione è che possono essere utilizzate con profitto a livello didattico per fornire agli studenti che iniziano tali studi una visione semplificata del meccanismo di fenomeni che altrimenti non sarebbero alla loro portata. Vedremo come sia perfettamente possibile ottenere un utile teoria che si muova in ambito classico a patto di riformulare il vecchio principio di composizione lineare dei potenziali.

Teoria classica

Esaminiamo innanzi tutto il caso del comportamento di un corpo puntiforme di massa m_0 sottoposto ad un potenziale efficace derivato dalla composizione di due potenziali. Avremo quindi in meccanica classica (ponendo per semplicità: $m_0 = 1$) che l'energia totale è:

$$E = \frac{1}{2}v^2 + U_{\text{eff}} \quad (1)$$

Mentre l'energia potenziale efficace sarà semplicemente la somma di tutti i potenziali presenti nello spazio. Se consideriamo per semplicità solo due potenziali avremo:

$$U_{\text{eff}} = U_1 + U_2 \quad (2)$$

dove con U è stato indicato il potenziale. Vediamo ora come si può estendere tale teoria.

Teoria semiclassica

Riscriviamo adesso la (1) nel seguente modo:

$$E = \frac{1}{2}v^2 + U(U_1; U_2) \quad (3)$$

dove con ε abbiamo indicato l'energia relativa, ovvero l'energia totale, che godrà della proprietà di conservazione. Stabiliamo adesso che tutti i potenziali presenti nello spazio si possano influenzare tra loro producendo un termine di "mescolamento" osservabile da un sistema di riferimento (SR) esterno infinitamente lontano cioè:

$$U_{\text{eff}} = U_1 + U_2 + \frac{2U_1U_2}{c^2} \quad (4a)$$

Con questo nel caso di tre potenziali si può ricavare per esempio che:

$$U_{\text{eff}} = U_1 + U_2 + U_3 + \frac{2U_1U_2}{c^2} + \frac{2U_1U_3}{c^2} + \frac{2U_2U_3}{c^2} + \frac{4U_1U_2U_3}{c^4} \quad (4b)$$

Notiamo pertanto che in tale teoria appaiono alla fine dei termini in più dovuti all'interazione dei potenziali che chiameremo: "*potenziali di interazione*" accompagnati da un opportuno *coefficiente di accoppiamento*. Questa mescolanza di potenziali è la causa principale di certi effetti che si notano in RG. Nel caso che la nostra particella sia insensibile ad uno di questi potenziali non è detto che lo sia pure per il suo potenziale di interazione.

Per trovare fin dove la TSC si può considerare affidabile occorre che il potenziale efficace sia più piccolo rispetto all'energia cinetica limite, altrimenti tale potenziale potrebbe portare il corpo ad avere una velocità superiore a quella della luce. Quindi usando la (3) abbiamo: $U_{\text{eff}} < c^2/2$ o anche:

$$2U_{\text{eff}}/c^2 < 1 \quad (5)$$

Applicazioni pratiche 1 (particella con massa a riposo non nulla)

Nel caso di un corpo orbitante attorno ad un potenziale attrattivo centrale newtoniano sappiamo dalla MC che possiamo scrivere la (1) nel seguente modo:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{J^2}{2r^2} \quad (6a)$$

dove l'ultimo termine è il "*potenziale del momento angolare orbitale*" e J il "*momento angolare orbitale*". Secondo la TSC avremo invece:

$$U_{\text{eff}} = -\frac{GM}{r} + \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GMJ^2}{c^2 r^3} \quad (6b)$$

e quindi:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GMJ^2}{r^3 c^2} \quad (6c)$$

dove il termine: $-GMJ^2/r^3 c^2$ è il potenziale “mescolato” che chiameremo in questo caso: potenziale di interazione campo-orbita. Dalla (3) possiamo ricavare:

$$dt = [2(E - U_{\text{eff}})]^{-1/2} dr \quad (7)$$

Stabiliamo quindi (come nel caso classico) che per il nostro MSC:

$$J = r^2 \frac{d\phi}{dt} \quad (8a)$$

Dove J rappresenta il momento orbitale classico, ricaviamo quindi:

$$dt = \frac{r^2}{J} d\phi \quad (8b)$$

e facendo ricorso alla (7) abbiamo quindi:

$$\phi = \int \frac{J}{r^2} [2(E - U_{\text{eff}})]^{-1/2} dr \quad (9)$$

di conseguenza usando la (6c) e integrando su una rotazione completa abbiamo:

$$\phi = \int \frac{J}{r^2} \left(2E + \frac{2GM}{r} + \frac{2GMJ^2}{c^2 r^3} - \frac{J^2}{r^2} \right)^{-1/2} dr \quad (10)$$

che fornisce come risultato finale uno spostamento del perielio:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{rc^2} \quad (11)$$

L'integrale (10) è valido per un osservatore in un SR esterno a distanza molto grande rispetto al moto osservato.

Applicazioni pratiche 2 (particella con massa a riposo nulla)

Nel caso di un fotone la teoria impone che il semplice campo gravitazionali abbia un effetto nullo e che solo attraverso l'interazione campo-orbita è possibile influire sulla sua traiettoria nello spazio. Quindi per la deflessione di un raggio luminoso in prossimità di una stella dalla (6b) dovremo semplicemente eliminare il potenziale di attrazione gravitazionale:

$$U_{\text{eff}} = \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GMJ^2}{c^2 r^3} \quad (12a)$$

cioè:

$$\phi = \int \frac{J}{r^2} \left(2E + \frac{2GMJ^2}{c^2 r^3} - \frac{J^2}{r^2} \right)^{-1/2} dr \quad (12b)$$

che ci fornisce un risultato uguale a quello fornito dalla RG:

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2 r_0} \quad (13)$$

Giustificazione del modello in RG:

Si può dimostrare che nella RG il potenziale a cui è sottoposta una particella in che si muove in un un campo gravitazionale a simmetria centrale:

$$\varepsilon_0 \frac{dr}{cdt} = \sqrt{\varepsilon_0^2 - U^2(r)} \quad (14a)$$

dove il potenziale relativistico efficace $U(r)$ (calcolato a velocità nulla) è dato da:

$$\left(\frac{dr}{dt} = 0 \right) \Rightarrow U(r) = mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \left(1 + \frac{J^2}{c^2 r^2} \right)} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{J^2}{c^2 r^2} - \frac{2GMJ^2}{c^4 r^3}} \quad (14b)$$

derivando adesso la (14b) rispetto a r ed eguagliando a zero, per ottenere i valori stazionari, otteniamo dopo semplici passaggi un equazione che ci fornirà la derivata del potenziale efficace cercato per il nostro modello:

$$\frac{dU(r)}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = \frac{GM}{r^2} - \frac{J^2}{r^3} + \frac{3GMJ^2}{c^2 r^4} \quad (15a)$$

di conseguenza come U_{eff} per il nostro MSC possiamo in modo equivalente prendere la (6b).

Anelli di Kaplan

Si vuole trovare, usando la (TSC), i raggi delle orbite circolari stabili per una particella nel campo di un buco nero dato un osservatore in un SR esterno¹. I raggi delle orbite circolari sono determinati dagli estremi della funzione del potenziale efficace descritto dalla (6b): i minimi relativi corrispondono alle orbite stabili, i massimi alle orbite instabili. Indicando adesso il raggio di Schwarzschild con: $r_g = 2GM/c^2$ la soluzione compatibile delle equazioni con le condizioni:

$$U(r)_{\text{eff}} = \varepsilon_0 ; \quad dU(r)_{\text{eff}}/dr = 0 \quad (16)$$

1 S. A. Kaplan (1949)

è la seguente:

$$r = \frac{J^2}{c^2 r_g} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3c^2 r_g^2}{J^2}} \right) \quad (17)$$

che fornisce, dopo facili calcoli, il risultato dell'orbita stabile più vicina al centro:

$$r = 3r_g \quad ; \quad J = \sqrt{3}cr_g \quad ; \quad \varepsilon_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2}mc^2 \quad (18)$$

mentre nel caso del fotone, usando la (12a), avremo un anello di luce che ripiega su sé stesso fino a formare un'orbita completa e il cui raggio minimo è dato da: $r = 3r_g/2$. Tali risultati sono in ambedue i casi gli stessi di quelli previsti rigorosamente dalla RG.

Deflessione di un fascio luminoso da parte di una stella nella teoria semiclassica

Sebbene tale deflessione si possa calcolare tramite la (12b) possiamo illustrare una semplice dimostrazione di deflessione utile a livello didattico e comprensibile con le conoscenze del primo anno di fisica.

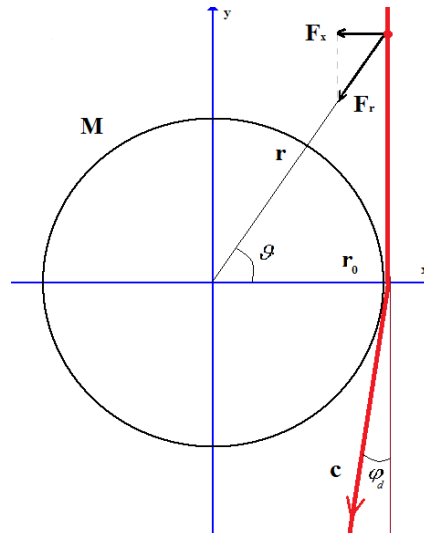


Fig. 1 deflessione di un fascio luminoso

Supponiamo di avere un fascio luminoso composto classicamente da particelle di massa piccola a piacere (ma non nulla, e per praticità poniamo: $m_0 = 1$) che partendo dall'infinito sfiora una stella e venga quindi deflesso. Sappiamo per la TSC che il potenziale newtoniano “ $-GM/r$ ” non ha effetti sulla traiettoria di un fascio di luce² che pertanto subirà la sola influenza attrattiva del potenziale di interazione campo-orbita:

$$U_i = -\frac{GMJ^2}{c^2 r^3} \quad \Rightarrow \quad F_r = -\frac{dU_i}{dr} = \frac{3GMJ^2}{c^2 r^4} \quad (19)$$

² Infatti il semplice potenziale newtoniano $-GM/r$ non può “accelerare” un'onda elettromagnetica.

Calcoliamo ora la componente lungo l'ascissa della forza attrattiva che sarà:

$$F_x = F_r \cos \theta = F_r \frac{r_0}{r} = F_r \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + y^2}} = \frac{3GMJ^2 r_0}{c^2 (r_0^2 + y^2)^{5/2}} = \frac{dv_x}{dt} \quad (20)$$

e tenendo conto delle posizioni (21) calcoliamo alla fine la componente parallela all'ascissa della velocità della particella componente del fascio luminoso integrando poi rispetto a tutto il percorso sull'asse y (22).

$$c = -\frac{dy}{dt} \Rightarrow dt = -\frac{dy}{c} \quad ; \quad J = r_0 c \quad (21)$$

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{3GMr_0^3}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} (r_0^2 + y^2)^{-5/2} dy = \frac{6GMr_0^3}{c} \int_0^{+\infty} (r_0^2 + y^2)^{-5/2} dy = \\ &= \frac{6GMr_0^3}{c} \cdot \frac{2}{3r_0^4} = \frac{4GM}{cr_0} \end{aligned} \quad (22)$$

alla fine otteniamo il risultato corretto della deflessione di un fascio luminoso:

$$\varphi_d \approx \frac{v_x}{c} = \frac{4GM}{c^2 r_0} \quad (23)$$

Spostamento del perielio nella teoria semiclassica.

Sebbene tale spostamento si possa calcolare tramite la (10) possiamo illustrare un ulteriore semplice dimostrazione utile a livello didattico e comprensibile con le conoscenze del primo anno di fisica.

Consideriamo il potenziale (6b), deriviamo ed eguagliamo a zero allo scopo di ricavare J^2 nel punto di equilibrio (vedi Fig. 2):

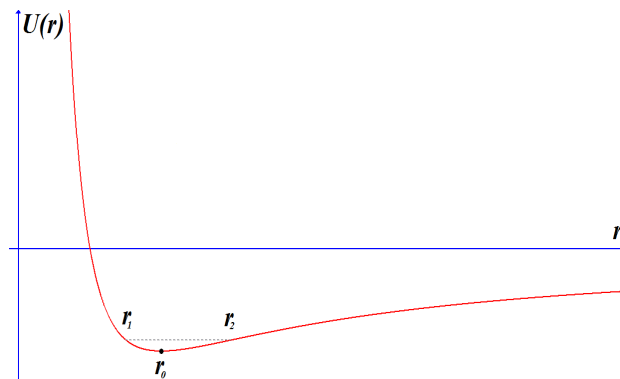


Fig. 2 punto di equilibrio del potenziale $U(r)$

$$\frac{dU(r)}{dr} = \frac{GM}{r^2} - \frac{J^2}{r^3} + \frac{3GMJ^2}{c^2 r^4} \quad (24)$$

$$\frac{dU(r_0)}{dr} = 0 \Rightarrow J^2 = \frac{GM r_0}{1 - \frac{3GM}{c^2 r_0}} \quad (25)$$

Tenendo conto delle seguenti posizioni:

$$J = \omega_J r_0^2 ; \omega_{J_0} \equiv \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}} \quad (26)$$

otteniamo la velocità angolare orbitale media:

$$\omega_J = \frac{\omega_{J_0}}{\sqrt{1 - \frac{3GM}{c^2 r_0}}} \quad (27)$$

Calcoliamo adesso la velocità angolare radiale del corpo per piccole oscillazioni (tra un raggio minimo r_1 e un raggio massimo r_2) intorno alla posizione di equilibrio³. (vedi Fig. 2)

$$\omega_r^2 = \frac{d^2U(r_0)}{dr^2} = -\frac{2GM}{r_0^3} + \frac{3J^2}{r_0^4} - \frac{12GMJ^2}{c^2 r_0^5} \quad (28)$$

e indicando con:

$$\omega_{0r}^2 \equiv \frac{GM}{r_0^3} \quad (29)$$

possiamo calcolare il periodo radiale del sistema:

$$\omega_r = \omega_{0r} \sqrt{\frac{1 - \frac{6GM}{c^2 r_0}}{1 - \frac{3GM}{c^2 r_0}}} \Rightarrow T_r = T_{0r} \sqrt{\frac{1 - \frac{3GM}{c^2 r_0}}{1 - \frac{6GM}{c^2 r_0}}} \quad (30)$$

Per ottenere lo spostamento angolare a questo punto basta moltiplicare la velocità angolare media (27) con il periodo radiale:

$$\varphi = \omega_J T_r = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2 r_0}}} \simeq 2\pi \left(1 + \frac{3GM}{c^2 r_0} \right) = 2\pi + \frac{6\pi GM}{c^2 r_0} \quad (31)$$

Quindi otteniamo alla fine il valore di spostamento angolare cercato:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 r_0} \quad (32)$$

³ Quindi consideriamo piccole eccentricità dell'orbita.

Giustificazione del modello in relatività ristretta.

Possiamo giustificare tale modello in ambito della RR, quindi in un semplice spazio piatto pseudo-euclideo. Dal teorema di Einstein:

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} - p_r^2 - \frac{J^2}{r^2} = m_0^2 c^2 \quad (33)$$

La (33) si può riscrivere come:

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} - p_r^2 = m_0^2 c^2 \left(1 + \frac{J^2}{m_0^2 c^2 r^2} \right) = m_0^2 c^2 f_1^2(U_i) \quad (34)$$

possiamo ragionevolmente supporre che la massa a riposo risenta del potenziale del momento orbitale a cui è sottoposta. Indicheremo con $f_1(U_i)$ un opportuna funzione di tipo inerziale da ricavare:

$$m(U_i) = m_0 f_1(U_i) = m_0 \sqrt{1 - \frac{2U_i}{c^2}} \quad \text{dove: } U_i = \frac{J^2}{2m_0^2 r^2} \quad (35)$$

allo stesso modo possiamo supporre che (in assenza di un potenziale inerziale) esista un opportuna funzione gravitazionale tale che:

$$m(U_g) = m_0 f_2(U_g) \quad \text{dove: } U_g = -\frac{GM}{r} \quad (36)$$

Per il principio dell'indistinguibilità locale tra accelerazione gravitazionale e inerziale le due funzioni devono essere uguali e componibili tra loro in modo commutativo in modo che l'effetto del campo inerziale in una massa sottoposta ad un campo gravitazionale sia equivalente all'effetto del campo gravitazionale nella stessa massa sottoposta al campo inerziale:

$$m(U_i ; U_g) = m_0 f_1(U_i) f_2(U_g) = m_0 f(U_i) f(U_g) \quad (37)$$

quindi possiamo generalizzare la (34) in modo da mantenere la Lorentz invarianza conforme:

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} - p_r^2 = m_0^2 c^2 f^2(U_i) f^2(U_g) \quad (38)$$

che, in virtù dell'eguaglianza tra le due funzioni in (35) e (36), si può riscrivere come:

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} - p_r^2 = m_0^2 c^2 \left(1 + \frac{J^2}{m_0^2 c^2 r^2} \right) \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \quad (39)$$

sviluppando la (39) abbiamo per una particella con massa a riposo non nulla:

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} - m_0^2 c^2 = p_r^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{2GMm_0^2}{r} - \frac{2GMJ^2}{r^3 c^2} \quad (40)$$

per una particella con massa a riposo nulla (o meglio tendente a zero) abbiamo invece:

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} = p_r^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{2GMJ^2}{r^3 c^2} \quad (41)$$

dove anche nel caso del fotone J è una costante del moto.

la (40) può essere riscritta come:

$$E = \frac{p_r^2}{2m_0} + \frac{J^2}{2m_0 r^2} - \frac{GMm_0}{r} - \frac{GMJ^2}{m_0 r^3 c^2} \quad (42)$$

dove abbiamo posto:

$$E \equiv \frac{\frac{\varepsilon^2}{c^2} - m_0^2 c^2}{2m_0}$$

Possiamo vedere che, se le velocità radiali sono trascurabili rispetto a c , la (42) si può confondere con il caso classico a parte l'aggiunta del potenziale di interazione campo-orbita.

Se adesso supponiamo di avere una particella con massa piccola a piacere (ma non nulla) che non risenta in modo diretto del potenziale gravitazionale ma solo del suo potenziale di interazione, quindi la (41) si può riscrivere come:

$$E = \frac{p_r^2}{2m_0} + \frac{J^2}{2m_0 r^2} - \frac{GMJ^2}{m_0 r^3 c^2} \quad (43)$$

che è appunto il caso del fotone reinterpretato in modo più semplice dalla TSC.

Conclusioni

Un primo approccio per costruire il modello lo possiamo ricavare considerando un semplice sistema di riferimento a due dimensioni e imponendo che la metrica debba risultare rigorosamente pseudo-euclidea conforme, con i tensori:

$$-g_{11} = g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(1 + \frac{J^2}{m_0^2 c^2 r^2}\right)$$

che si accordano per fornirci i corretti potenziali e la metrica voluta:

$$ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 + g_{11} dr^2 = g_{00} (c^2 dt^2 - dr^2)$$

Tale metodo che fa riferimento ad uno spazio bidimensionale pseudo-euclideo curvo ci permetterebbe alla fine di ottenere i medesimi risultati.

Dalla (14b) possiamo vedere il significato euristico del potenziale di interazione campo-orbita che non scaturisce da inestricabili risvolti matematici della curvatura dello spazio-tempo ma da qualcosa di molto più “fisico”:

$$\left(\frac{dr}{dt} = 0\right) \Rightarrow U(r) = m_0 c^2 \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(1 + \frac{J^2}{m_0^2 c^2 r^2}\right)} = m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{J^2}{m_0^2 c^2 r^2}}$$

Qui infatti possiamo vedere dal termine inerente al potenziale gravitazionale $-GM/r$ come varia la massa a riposo di una particella (per l'equivalenza massa-energia) immersa in un campo gravitazionale e come tali modifiche di tipo gravitazionale della massa si devono considerare anche per gli effetti inerziali tramite il secondo termine a prodotto.

In realtà basta guardare la (35) e la (36) per rendersi conto che siamo in presenza di una ridefinizione del concetto di potenziale; se abbiamo più potenziali il potenziale relativistico totale così è dato dal prodotto dei singoli potenziali relativistici invece che da una semplice somma come nel caso classico.

Quindi insieme al principio di equivalenza massa-energia il significato più profondo lo troviamo nella indistinguibilità locale tra il campo gravitazionale e campo inerziale che insieme determinano una variazione della massa di un corpo in modo che variazioni gravitazionali della massa hanno conseguenze inerziali e viceversa; le due caratteristiche dunque si amalgamano tra loro creando alla fine un potenziale “mescolato” cioè un potenziale di interazione.

La possibilità di una massa di poter subire una variazione dipendente da un potenziale (in accordo con il principio di equivalenza massa-energia) permette di spiegare, in modo qualitativo, la (3) e la (4a) dato che possiamo supporre che ciascun potenziale verrà influenzato dall'altro (sempre mediante la massa) e quindi si potrà riscrivere tutto come:

$$U_{\text{eff}}(U_1; U_2) = U_1 \left(1 + U_2/c^2\right) + U_2 \left(1 + U_1/c^2\right) = U_1 + U_2 + 2U_1 U_2 / c^2$$

Sebbene la TSC sia semplicemente innestata nella TC (mediante la correzione del potenziale di interazione) essa riesce a fornire i risultati della RG in modo esatto nel caso di un campo gravitazionale statico a simmetria centrale, purché la particella non oltrepassi il raggio di Schwarzschild, dato che la velocità della particella supererebbe il valore di c e pertanto per la RR e RG non potremmo avere più informazioni dal corpo.

I vantaggi di questa formulazione sono indubbi visto che una volta impostata la conservazione dell'energia i calcoli rientrano completamente nell'ambito della MC senza doverci preoccupare di altro. Nel caso del fotone abbiamo visto che il semplice potenziale gravitazionale newtoniano non ha influenza sul moto della particella, che pertanto manterrà la sua velocità costante, tuttavia nulla impedisce in questo modello che tale influenza venga esercitata solo nella frequenza (come in realtà avviene) in accordo con la legge di Planck e il principio di conservazione dell'energia; per cui, per esempio, la frequenza di un fotone che si allontana (o si avvicina) rispetto ad un pianeta con un certo campo gravitazionale dovrà diminuire (o rispettivamente aumentare) durante il percorso.

I limiti del modello semi-classico sono quelli di considerare a priori il tempo e lo spazio come quantità assolute e non relative, di conseguenza non si fa distinzione tra SR solidali con il corpo in movimento o esterni a distanza infinita, ed occorre quando si vuol distinguere i due casi ricorrere ad una correzione presa interamente a prestito dalla RG e che naturalmente non si può giustificare nell'ambito della MC.

Bibliografia essenziale: Lev D. Landau, Evgenij M. Lifshits - *Teoria dei Campi* - Edizioni Mir